22107226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Jueves 6 de mayo de 2010 (mañana)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

Considere la progresión aritmética $8, 26, 44, \ldots$.

(a) Halle una expresión para el término n-ésimo. *[1 punto]*

(b) Escriba la suma de los n primeros términos, utilizando la notación sigma. *[1 punto]*

(c) Calcule la suma de los 15 primeros términos. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

Una variable aleatoria discreta X tiene la distribución de probabilidad dada en la siguiente tabla.

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\mathrm{P}(X = x)$	0,15	0,21	p	q	0,13	0,07

(a) Si $\mathrm{E}(X) = 2{,}61$, determine el valor de p y de q. *[4 puntos]*

(b) Calcule $\mathrm{Var}(X)$, con una aproximación de tres cifras significativas. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

El tiempo de supervivencia de las malas hierbas de un campo, después de haber sido rociadas con un herbicida, sigue una distribución normal cuya media es igual a 15 días.

(a) Si la probabilidad de una supervivencia de más de 21 días es igual a 0,2 , halle la desviación típica del tiempo de supervivencia. *[3 puntos]*

Cuando se rocía otro campo, el tiempo de supervivencia de las malas hierbas sigue una distribución normal cuya media es igual a 18 días.

(b) Si la desviación típica del tiempo de supervivencia no cambia, halle la probabilidad de una supervivencia de más de 21 días. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Halle la solución de la ecuación

$$\ln 2^{4x-1} = \ln 8^{x+5} + \log_2 16^{1-2x};$$

exprese la respuesta en función de $\ln 2$. *[4 puntos]*

(b) Utilizando este valor de x, halle el valor de a para el cual $\log_a x = 2$; dé la respuesta con una aproximación de 3 cifras decimales. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere el triángulo ABC, donde $\mathrm{B\hat{A}C} = 70^\circ$, $\mathrm{AB} = 8\,\mathrm{cm}$ y $\mathrm{AC} = 7\,\mathrm{cm}$. El punto D, situado sobre el lado BC, es tal que $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = 2$.

Determine la longitud de AD.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media λ.

(a) Halle λ, si $\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=0{,}123$. *[4 puntos]*

(b) Con este valor de λ, halle $\mathrm{P}(0<X<9)$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. *[Puntuación máxima: 6]*

Los tres planos

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 3 \\ 4x + 5y - 2z &= -3 \\ 3x + 4y - 3z &= -7 \end{aligned}$$

se cortan en un punto de coordenadas (a, b, c).

(a) Halle el valor de a, b y c. *[2 puntos]*

(b) Las ecuaciones de otros tres planos son

$$\begin{aligned} 2x - 4y - 3z &= 4 \\ -x + 3y + 5z &= -2 \\ 3x - 5y - z &= 6. \end{aligned}$$

Halle una ecuación vectorial de la recta de intersección de estos tres planos. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Simplifique la resta de coeficientes binomiales

$$\binom{n}{3}-\binom{2n}{2}, \text{ donde } n \geq 3 .$$ *[4 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, resuelva la inecuación

$$\binom{n}{3}-\binom{2n}{2} > 32n , \text{ donde } n \geq 3 .$$ *[2 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Puntuación máxima: 7]*

Sabiendo que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$, compruebe que

(a) $\mathrm{Im}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right) = 0,\ n \in \mathbb{Z}^+$; *[2 puntos]*

(b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0,\ z \neq -1$. *[5 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

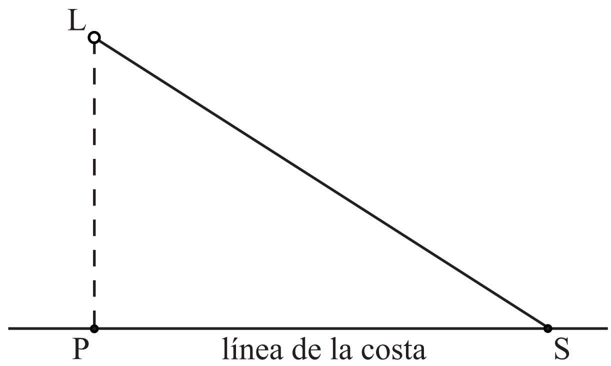
. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 8]*

Un faro L está situado en el mar, a 500 metros de P, el punto más cercano de la costa, que sigue una línea recta. El estrecho haz de luz que emite el faro rota a razón constante de 8π radianes por minuto, generando un punto luminoso S que se mueve a lo largo de la costa. Puede suponer que la altura del faro puede ser ignorada y que el haz de luz está contenido en el plano horizontal definido por el nivel del mar.



Cuando S está a 2000 metros de P,

(a) compruebe que la velocidad de S, con una aproximación de tres cifras significativas, es de 214 000 metros por minuto; *[5 puntos]*

(b) halle la aceleración de S. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 14]*

La función f viene dada por

$$f(x) = (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } x \in D,$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}$ es el mayor dominio de f posible.

(a) Halle las raíces de $f(x) = 0$. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, especifique el conjunto D. *[2 puntos]*

(c) Halle las coordenadas del máximo local en la gráfica de $y = f(x)$. *[2 puntos]*

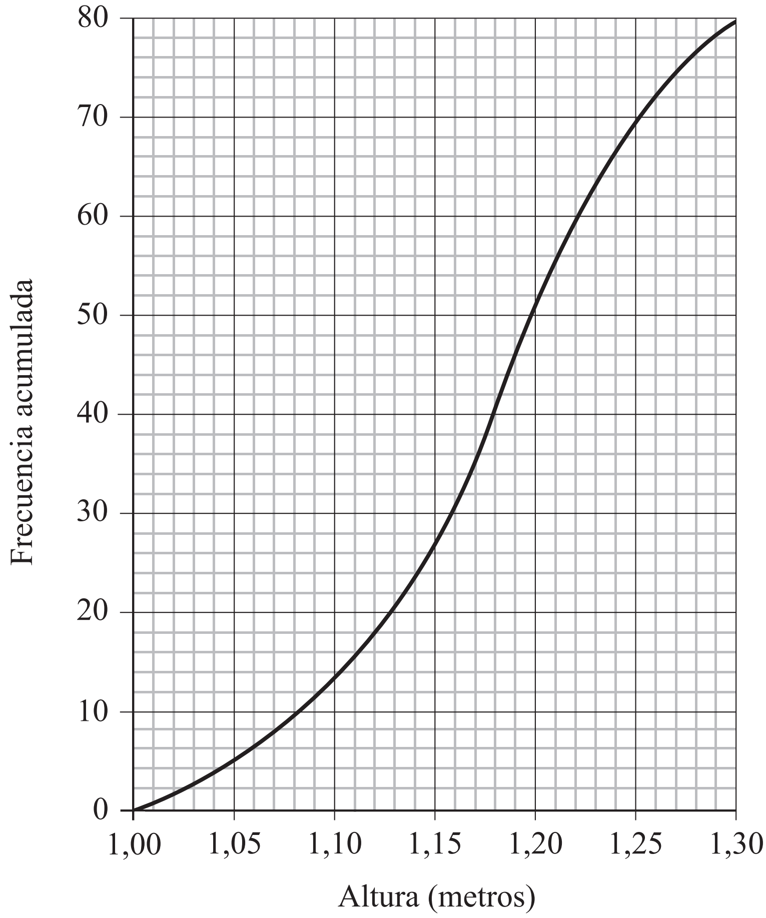
(d) Resuelva la ecuación $f(x) = 3$. *[2 puntos]*

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $|y| = f(x)$, para $x \in D$. *[3 puntos]*

(f) Halle el área de la región que queda completamente delimitada por la gráfica de $|y| = f(x)$. *[3 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 13]*

Se mide la altura, en metros, de una muestra aleatoria compuesta por 80 niños de un determinado grupo de edad, y se obtiene la siguiente gráfica de frecuencias acumuladas:



(a) (i) Estime la mediana de estos datos.

(ii) Estime el rango intercuartil para estos datos. *[3 puntos]*

(b) (i) Haga una tabla de frecuencias para estos datos, utilizando para las clases, una amplitud de 0,05 metros.

(ii) Calcule estimaciones sin sesgo de la media y de la varianza de las alturas de la población de niños pertenecientes a este grupo de edad. *[5 puntos]*

(c) Se escoge un niño al azar, de entre estos 80 niños.

(i) Halle la probabilidad de que su altura sea inferior o igual a 1,15 metros.

(ii) Sabiendo que su altura es inferior o igual a 1,15 metros, halle la probabilidad de que su altura sea inferior o igual a 1,12 metros. *[5 puntos]*

13. *[Puntuación máxima: 12]*

Un círculo de 2 cm de radio se divide en un número infinito de sectores circulares. Las áreas de estos sectores circulares forman una progresión geométrica, de razón común igual a k. El ángulo del primer sector circular es igual a θ radianes.

(a) Compruebe que $\theta = 2\pi(1-k)$. *[5 puntos]*

(b) El perímetro del tercer sector circular mide la mitad que el perímetro del primer sector circular.

Halle el valor de k y de θ. *[7 puntos]*

14. *[Puntuación máxima: 21]*

Las funciones f, g y h se definen de la siguiente forma

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{x}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, \text{ para } x \in \mathbb{R} / \{0\},$$
$$h(x) = \sec x, \text{ para } x \in \mathbb{R} / \left\{\frac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(a) Determine el recorrido de la función compuesta $g \circ f$. *[3 puntos]*

(b) Determine la inversa de la función $g \circ f$, indicando claramente el dominio. *[4 puntos]*

(c) (i) Compruebe que la función $y = (f \circ g \circ h)(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-y)\operatorname{sen} x.$$

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle $\int y \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$, en función de x.

(iii) Se le dice que el dominio de $y = (f \circ g \circ h)(x)$ se puede ampliar a todo el eje real. La parte de la gráfica de $y = (f \circ g \circ h)(x)$ comprendida entre el máximo, en $x = 0$, y el primer mínimo con x positivo, se rota 2π alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido de revolución generado. *[14 puntos]*